

# Mecklenburg-Vorpommern



Dieses Dokument kann strukturelle Abweichungen vom derzeit gültigen Abitur aufweisen. Dennoch können Inhalte und Kompetenzen dieser Aufgaben einen wertvollen Beitrag in der Prüfungsvorbereitung leisten.

## Musterabitur aus dem Jahr 2022

### Mathematik (CAS)

Grundkurs

Prüfungsteil B – komplexe Aufgaben

## Hinweise für Schülerinnen und Schüler

**Aufgabenwahl:** Der Prüfungsteil B beinhaltet vier Pflichtaufgaben. Dabei sind in den zwei Aufgaben zur Analysis 10 und 35 Bewertungseinheiten erreichbar, in den zwei Aufgaben zur Geometrie sind es 10 und 20.

**Bearbeitungszeit:** Allen Prüfungsteilnehmern steht eine Bearbeitungszeit von 225 Minuten zuzüglich 30 Minuten für die Aufgabenauswahl zur Verfügung.

Nach Abgabe des Prüfungsteils A nutzt der Prüfling den verbleibenden Zeitraum für die Bearbeitung dieses Prüfungsteils B.

**Hilfsmittel:** Für die Bearbeitung der Aufgaben des Teils B sind zugelassen:

- ein an der Schule eingeführtes Tafelwerk,
- ein an der Schule zugelassenes Computeralgebrasystem (CAS),
- Zeichengeräte,
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung.

Schülerinnen und Schüler, deren Muttersprache nicht die deutsche Sprache ist, können als zusätzliches Hilfsmittel ein zweisprachiges Wörterbuch in gedruckter Form verwenden. Näheres regelt die Schule.

**Sonstiges:** Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen. In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei guter Notation und Darstellung sowie eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können bei mehrfachen Formverstößen abgezogen werden.

## 1 Analysis

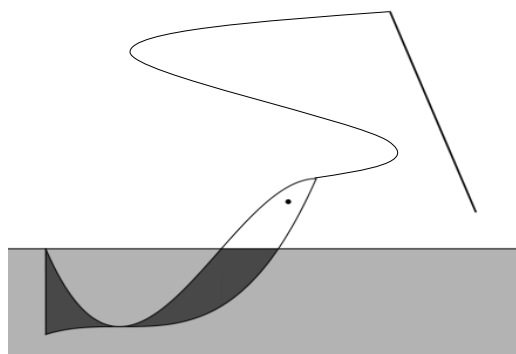
Gegeben ist die Funktionenschar  $f_t(x) = (x^2 - t \cdot x) \cdot e^x$  mit  $x, t \in \mathbb{R}$ .

- |     |   |      |
|-----|---|------|
| 1.1 | Zeigen Sie, dass die Graphen von $f_t$ für alle Werte von $t$ durch den Koordinatenursprung verlaufen.  | 1 BE |
| 1.2 | Zeichnen Sie den Graph von $f_2$ im Intervall $-5 \leq x \leq 2$ in ein Koordinatensystem.  | 2 BE |
| 1.3 | Für alle Werte von $t$ hat der Graph von $f_t$ einen Hochpunkt. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von $t$ so, dass der Hochpunkt die $x$ -Koordinate $-3$ hat. | 2 BE |
| 1.4 | Das Dreieck mit den Eckpunkten $A(0 \mid 0)$ , $B(a \mid 0)$ und $C(a \mid f_2(a))$ hat den Flächeninhalt 2022. Berechnen Sie einen Näherungswert von $a$ .     | 3 BE |
| 1.5 | Für einen Wert von $t$ gibt es nur eine Tangente an den Graphen von $f_t$ , die eine Ursprungsgerade ist. Ermitteln Sie diesen Wert von $t$ .                   | 2 BE |

## 2 Analysis

Die Abbildung zeigt das Logo eines Geschäfts für Anglerbedarf. Die obere Spitze der Schwanzflosse des Fische liegt auf der Wasseroberfläche; die Strecke zwischen oberer und unterer Spitze der Schwanzflosse steht senkrecht zur Wasseroberfläche.

Bei Verwendung eines geeigneten Koordinatensystems kann die untere



Begrenzungslinie des Fische mithilfe der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $u(x) = \frac{1}{8}x^3$ , die obere

Begrenzungslinie mithilfe der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $v(x) = \frac{1}{4}x^2 \cdot (4 - x)$  beschrieben und

die Wasseroberfläche durch die Gerade mit der Gleichung  $y = \frac{5}{4}$  dargestellt werden.

- 2.1 Zeigen Sie, dass die Graphen von  $u$  und  $v$  nur die Punkte  $P(0|0)$  und  $Q\left(\frac{8}{3}|\frac{64}{27}\right)$  gemeinsam haben. 3 BE
- 2.2 Weisen Sie nach, dass der Punkt  $Q$  ein Extrempunkt des Graphen von  $v$  ist, und geben Sie die Art dieses Extrempunkts an. 3 BE
- 2.3 Entscheiden Sie für jede der Aussagen I und II, ob sie richtig oder falsch ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung jeweils rechnerisch. 4 BE
- I Für jeden Wert von  $x \in \left]0; \frac{8}{3}\right[$  ist die Steigung des Graphen von  $v$  größer als die Steigung des Graphen von  $u$ .
- II Die Graphen von  $u$  und  $v$  berühren sich im Punkt  $P$ .
- 2.4 Berechnen Sie die Ausdehnung des Fische in  $x$ -Richtung und in  $y$ -Richtung. 5 BE
- 2.5 Der dunkelgrau markierte Teil des Fische befindet sich im Wasser. Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Teils des Fische. 6 BE

**Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.**

- 2.6 Das Logo des Geschäfts soll verändert werden. Für die obere Begrenzungslinie des Fisches wird weiterhin die Funktion  $v$  verwendet. Die untere Begrenzungslinie jedoch soll anstelle von  $u$  mithilfe einer anderen der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen  $u_k(x) = \frac{1}{8} k \cdot x^3$  mit  $k > 0$  beschrieben werden. Der gemeinsame Punkt der Graphen von  $u_k$  und  $v$ , der die x-Koordinate  $\frac{8}{k+2}$  hat, stellt die Kopfspitze dar.
- 2.6.1 Weisen Sie nach, dass die x-Achse für alle Werte von  $k$  Tangente an den Graphen von  $u_k$  in dessen Wendepunkt ist. 2 BE
- 2.6.2 Bestimmen Sie, wie der Wert von  $k$  gewählt werden müsste, damit die Ausdehnung der Schwanzflosse in y-Richtung  $\frac{3}{2}$  beträgt. 3 BE
- 2.6.3 Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters  $k$  auf die Lage der Kopfspitze. 2 BE
- 2.6.4 Untersuchen Sie für jede der folgenden Eigenschaften I, II und III, für welche Werte von  $k$  diese zutrifft. 7 BE
- I Die Kopfspitze ragt aus dem Wasser heraus.
  - II Die obere Begrenzungslinie des Fisches verläuft an der Kopfspitze parallel zur Wasseroberfläche.
  - III Die Kopfspitze ist der höchste Punkt des Fisches.

### 3 Analytische Geometrie

Im Landschaftsgarten Neubrandenburg steht eine rechteckige Aussichtsplattform mit Dach (siehe Abbildung 1). In einem Koordinatensystem liegt die Aussichtsplattform in der  $xy$ -Ebene. Die Ecken des dreieckigen Daches werden durch die Koordinaten  $A(0|0|3)$ ,  $B(5|0|2,5)$  und  $C(0|6|3,5)$  beschrieben. Drei der vier Eckpunkte der Plattform befinden sich ungefähr lotrecht unter den Eckpunkten des Dachs. Der vierte Eckpunkt der Plattform hat die Koordinaten  $(5|6|0)$ .

Die Längeneinheit ist 1 m.



Abbildung 1: Foto der Aussichtsplattform im Landschaftsgarten

3.1 Stellen Sie das Dach und die Plattform in einem Koordinatensystem grafisch dar. 3 BE

3.2 Bestimmen Sie für die Ebene, in der die Punkte A, B und C liegen, eine Gleichung in Koordinatenform. 3 BE

Zur Kontrolle:  $\vec{n}_E : \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 60 \end{pmatrix}$

3.3 Berechnen Sie die Größe des Neigungswinkels des Dachs gegenüber der Plattform. 2 BE

3.4 Skizzieren Sie in die Abbildung 2 die Lage der Koordinatenachsen. 2 BE



Abbildung 2

## 4 Analytische Geometrie

Die Abbildung zeigt ein Gebäude des Flughafens von Palma de Mallorca. Im eingezeichneten kartesischen Koordinatensystem kann die 140 Meter lange Dachkonstruktion modellhaft durch einen halben Zylinder und drei Prismen zusammengesetzt werden; die dreieckigen Grundflächen dieser Prismen sind kongruent.



Der Boden des Gebäudes sowie die Startbahnen des Flughafens liegen im Modell in der  $xy$ -Ebene. Die Seitenkanten der Prismen verlaufen parallel zur  $y$ -Achse. Die Punkte  $A(0|0|3)$ ,  $B(0|0|4)$  und  $C(3,5|0|7,5)$  sind Eckpunkte eines der Prismen. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

4.1 Weisen Sie nach, dass das Dreieck  $ABC$  gleichschenkelig und im Punkt  $C$  rechtwinklig ist. 3 BE

4.2 Bestimmen Sie das Volumen der gesamten Dachkonstruktion. 3 BE

Der Abbildung liegt ein Foto zugrunde. Die Position der Kamera, mit der dieses Foto aufgenommen wurde, wird durch den Punkt  $K(30|20|1,5)$  dargestellt. Die weiße Dachfläche, die mit dem Schriftzug „Aeropuerto de Palma de Mallorca“ versehen ist, liegt im Modell in der Ebene  $E$ .

4.3 Ermitteln Sie eine Gleichung von  $E$  in Koordinatenform. 3 BE

(zur Kontrolle:  $E : x + z = 11$ )

4.4 Eine Sichtlinie verläuft von der Kamera geradlinig zum Mittelpunkt der weißen Dachfläche. Berechnen Sie die Größe des Winkels, den diese Sichtlinie mit der Dachfläche einschließt. 4 BE

**Der Aufgabentext wird auf der folgenden Seite fortgesetzt.**

Hinter dem Gebäude startet ein Flugzeug. Ab einer bestimmten Höhe über der Startbahn ist die Flugzeugspitze von der Position der Kamera aus oberhalb des Gebäudes sichtbar. Im Folgenden soll diese Höhe ermittelt werden.

- 4.5 Begründen Sie anhand einer geeignet beschrifteten Skizze, dass diejenigen Punkte der Dachkonstruktion, die am höchsten über dem Boden des Gebäudes liegen, für die Ermittlung der gesuchten Höhe keine Rolle spielen. 2 BE

- 4.6 Von der Position der Kamera aus wird die Flugzeugspitze unmittelbar oberhalb derjenigen Punkte der Dachkonstruktion sichtbar, die im Modell näherungsweise auf

der Gerade mit der Gleichung  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 0 \\ 10,9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  liegen. Die Spitze des startenden

Flugzeugs bewegt sich im Modell entlang der Gerade mit der Gleichung

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -60 \\ -990 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1000 \\ 0 \\ 350 \end{pmatrix}$ . Ermitteln Sie die gesuchte Höhe.